Bevis: Regneregler for logaritmer

Logaritmeregnereglerne nævnes side 42 og side 124 i bogen. Vi gennemgår her et bevis for regnereglerne. Vi formulerer sætningen og beviset for titalslogaritmen, *log*, men det kan formuleres helt tilsvarende for den naturlige logaritme, *ln*.

Sætning

For titalslogaritmen, *log*, gælder for alle positive *a* og *b*, samt alle *x* følgende:

1. $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(\mathrm{b})$
2. $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(\mathrm{b})$
3. $\log(a^x) = x \cdot \log(a)$

I beviset nedenfor benyttes potensregneregler. Det kan derfor være en god idé først at læse om potensregnereglerne side 39, øverst. Regn gerne opgaverne herom side 279-280 i bogen.

Bevis

Vi minder om at titalslogaritmen er defineret så det gælder at

- $x = 10^{\log x}$, hvor x er et positivt tal
- $\log(10^x) = x$, hvor x er et vilkårligt tal.

Bevis for regel 1

$\log(a \cdot b) =$

Vi benytter at $a = 10^{\log a}$ og $b = 10^{\log b}$ (se overfor)

$\log(10^{\log a} \cdot 10^{\log b}) =$

Potensregnereglerne giver at $10^{\log a} \cdot 10^{logb} = 10^{loga+logb}$

$\log\left(10^{loga+logb}\right)=$

Vi benytter at $\log(10^x) = x$ (se ovenfor) og får:

$\log(a) + \log(\mathrm{b})$

Bevis for regel 2

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) =$$

Vi benytter at $a = 10^{\log a}$ og $b = 10^{\log b}$

$$\log\left(\frac{10^{log\ a}}{10^{log\ b}}\right) =$$

Potensregnereglerne giver at $\frac{10^{\log a}}{10^{\log b}} = 10^{loga-logb}$

$$\log\left(10^{loga-logb}\right)=$$

Vi benytter at $\log(10^x) = x$ og får:

$$\log(a) - \log(\mathrm{b})$$

Bevis for regel 3

$$\log(a^x) =$$

Vi omskriver *a*: $a = 10^{\log a}$

$$\log\left((10^{\log a})^x\right) =$$

Potensregnereglerne giver at $(10^{\log a})^x = 10^{x \cdot loga}$, derfor…

$$\log\left(10^{x \cdot loga}\right) =$$

Vi benytter at $\log(10^x) = x$ og får:

$$x \cdot \log(a)$$

Hermed er sætningen bevist.