Løsning af andengradsligningen

Vi nævner s. 36 i bogen at en andengradsligning har enten $0, 1$ eller 2 løsninger. Her kan du læse yderligere om hvordan man i praksis finder løsningerne. Vi vil her føre et bevis for at den angivne løsningsmetode er korrekt.

Inden du går i gang med beviset er der et par gode forberedelser.

- Læs teksten *Andengradsligningen* og løs nogle andengradsligninger fra teksten *Opgaver.*
- Genlæs bogens s. 24 om kvadratsætninger da de benyttes i beviset. Disse sætninger er uddybet i teksten *Kvadratsætninger.*

Linkene til de tre tekster findes på samme side som linket du netop har klikket på.

Sætningen

Vi kan formulere sætningen vi vil bevise på følgende måde: En 2. gradsligning er af formen

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{1}$$

hvor vi antager $a \neq 0$. Vi indfører diskriminanten, d, givet ved $d = b^2 - 4ac$. Der er *tre* muligheder:

1. Hvis $d < 0$ har ligningen ingen løsning
2. Hvis $d = 0$ har ligningen én løsning, nemlig:
$$x = -\frac{b}{2a}$$
3. Hvis $d > 0$ har ligningen *to* løsninger, nemlig
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a} \text{ og } x_2 = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a}.$$

Beviset

Ideen i beviset er at omskrive ligning (1) til en ligning hvor x kun forekommer i ét led. Vi ganger med $4a$ på begge sider af lighedstegnet (da $a \neq 0$ har vi lov til at gange med $4a$). Det giver

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0.$$

Vi lægger diskriminanten $b^2 - 4ac$ til på begge sider af lighedstegnet og reducerer

$$\begin{aligned} 4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 - 4ac &= b^2 - 4ac \\ 4a^2x^2 + 4abx + b^2 &= b^2 - 4ac \end{aligned} \tag{2}$$

På venstresiden af den sidste ligning skal du bemærke at første og tredje led kan skrives som henholdsvis

$$(2ax)^2 \text{ og } (b)^2.$$

Bemærk også at det andet led kan skrives $2\,(2ax)\,(b)$, altså som det dobbelte produkt af $(2ab)$ og (b). Det betyder at ligning (2) kan skrives

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Hermed har vi opnået at x kun forekommer i ét led. Højresiden er som nævnt diskriminanten d, så nu har vi at

$$(2ax + b)^2 = d.$$

Vi må nu opdele løsningen af ligningen i *tre* tilfælde afhængig af fortegnet for d.

1. Hvis $d < 0$ er der ingen løsning, da venstresiden $(2ax + b)^2$ ikke kan være et negativt tal.

2. Hvis $d = 0$ drejer det sig om at løse ligningen $(2ax + b)^2 = 0$. Vi får

$$\begin{aligned} (2ax + b)^2 &= 0 \\ 2ax + b &= 0 \\ 2ax &= -b \\ x &= -\frac{b}{2a}. \end{aligned}$$

3. Hvis $d > 0$ drejer det sig om at løse ligningen $(2ax+b)^2 = d$. Husk at en simpel ligning som $(y)^2 = 4$ har **to** løsninger. En positiv $y = 2$ og en negativ $y = -2$. Her gælder det tilsvarende at $(2ax + b)^2 = d$ har to løsninger, nemlig

$$2ax + b = \pm\sqrt{d}$$

eller mere udførligt skrevet

$$2ax + b = -\sqrt{d} \text{ eller } 2ax + b = \sqrt{d}.$$

Benyttes den første formulering er løsningerne

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}.$$

Benyttes den anden formulering er løsningner x_1 og x_2 givet ved

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a} \quad \text{og} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a}.$$