Bevis for formlen for gældsannuitet – udgave 2

Sætning – dvs. den påstand vi efterfølgende skal bevise

*Hvis man indbetaler ydelsen y hver termin i n terminer (første gang man betaler er én termin efter lånet er optaget), og rentefoden er r, **så** er lånets størrelse:*

$$G = y \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

Bevis

Følgende bevis er en temmelig lang udregning der kræver styr på rigtig mange udregninger.

Beviset udregnes med et eksempel hvor et lån tilbagebetales over 5 terminer, altså gælder $n=5$. Lånets størrelse er G, rentefoden pr. termin er r (fx rente = 3%, så er rentefoden 0,03):

Ved første termin G_1 betaler man første gang ydelsen y, det vil sige at ydelsen y trækkes fra gælden. Desuden føres der renter for den første termin på lånet, dvs. at gælden ganges med $1+r$. Dermed er den nye gæld ved første termin:

$$G_1 = G\cdot(1+r)-y$$

Ved anden termin G_2 betaler man anden gang ydelsen y, og denne gang føres renter for den anden termin på lånet. Den nye gæld er nu:

$$G_2 = G_1\cdot(1+r)-y$$

Vi kan her indsætte udtrykket for G_1 fra før. Vi får derefter:

$$G_2 = [G\cdot(1+r)-y]\cdot(1+r)-y$$

Vi kan gange ind i den kantede parentes:

$$\begin{aligned} G_2 &= G\cdot(1+r)\cdot(1+r)-y\cdot(1+r)-y \\ &= G\cdot(1+r)^2-y\cdot(1+r)-y \end{aligned}$$

Dette system i udregningen kan vi fortsætte for G_3, G_4 og G_5. Altså har vi:

$$G_3 = G_2\cdot(1+r)-y$$

Her indsætter vi nu det udtryk vi før fik for G_2:

$$G_3 = [G\cdot(1+r)^2-y\cdot(1+r)-y]\cdot(1+r)-y$$

Som ved udregningen af G_2 ganger vi ind i den kantede parentes:

$$G_3 = G\cdot(1+r)^3-y\cdot(1+r)^2-y\cdot(1+r)-y$$

Og vi gør dernæst det samme for G_4

$$\begin{aligned} G_4 &= G_3\cdot(1+r)-y \\ &= [G\cdot(1+r)^3-y\cdot(1+r)^2-y\cdot(1+r)-y]\cdot(1+r)-y \\ &= G\cdot(1+r)^4-y\cdot(1+r)^3-y\cdot(1+r)^2-y\cdot(1+r)-y \end{aligned}$$

Og til sidst for G_5:

$$\begin{aligned} G_5 &= G_4\cdot(1+r)-y \\ &= [G\cdot(1+r)^4-y\cdot(1+r)^3-y\cdot(1+r)^2-y\cdot(1+r)-y]\cdot(1+r)-y \\ &= G\cdot(1+r)^5-y\cdot(1+r)^4-y\cdot(1+r)^3-y\cdot(1+r)^2-y\cdot(1+r)-y \qquad (1) \end{aligned}$$

Da vi gik i gang med disse udregninger, fastslog vi at gælden skulle tilbagebetales over 5 terminer. Derfor er $G_5 = 0$, og dermed kan vi regne videre med resultatet i (1):

$$0 = G \cdot (1+r)^5 - y \cdot (1+r)^4 - y \cdot (1+r)^3 - y \cdot (1+r)^2 - y \cdot (1+r) - y$$

Hvis vi fastholder $G \cdot (1+r)^5$ på højre side af lighedstegnet og flytter resten over på højre side af lighedstegnet, får vi:

$$y \cdot (1+r)^4 + y \cdot (1+r)^3 + y \cdot (1+r)^2 + y \cdot (1+r) + y = G \cdot (1+r)^5$$

På venstre side står y i alle led, og derfor kan vi sætte y uden for en parentes:

$$y \cdot [(1+r)^4 + (1+r)^3 + (1+r)^2 + (1+r) + 1] = G \cdot (1+r)^5 \qquad (2)$$

I den kantede parentes står en sum. Der findes en sumformel der angiver en lettere måde at opskrive en sådan sum på. Formlen er bevist i ”Bevis for annuitetsopsparing” på denne hjemmeside.

Summen er af typen:

$$S_n = a^n + a^{n-1} + a^{n-2} + a^{n-3} + ... + a^1 + 1$$

I vores eksempel gælder at $a = (1+r)$ mens $n = r$.

$$fx\ S_4 = (1{,}02)^4 + (1{,}02)^3 + (1{,}02)^2 + (1{,}02) + 1$$

Ifølge sumformlen kan vi skrive summen

$$S_n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

$$fx\ S_4 = \frac{(1{,}02)^{4+1} - 1}{1{,}02 - 1} = \frac{(1{,}02)^5 - 1}{0{,}02}$$

Ved at anvende sumformlen får vi her:

$$(1+r)^4 + (1+r)^3 + (1+r)^2 + (1+r) + 1 = \frac{(1+r)^{4+1} - 1}{(1+r) - 1} = \frac{(1+r)^5 - 1}{r}$$

Dette resultat kan vi sætte ind i den kantede parentes i (2):

$$y \cdot \frac{(1+r)^5 - 1}{r} = G \cdot (1+r)^5$$

Herefter dividerer vi med $(1+r)^5$ på begge sider af lighedstegnet, og vi får:

$$y \cdot \frac{\left(\dfrac{(1+r)^5 - 1}{r}\right)}{(1+r)^5} = G$$

Når man dividerer en brøk med et tal, skal man gange tallet i brøkens nævner:

$$y \cdot \frac{(1+r)^5 - 1}{r \cdot (1+r)^5} = G$$

Nu dividerer vi med $(1+r)^5$ i alle tre led i brøken, og derved får vi:

$$G = y \cdot \frac{1 - \dfrac{1}{(1+r)^5}}{r} = y \cdot \frac{1 - (1+r)^{-5}}{r}$$

Til sidst udnytter vi at der gælder følgende potensregneregel: $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$.

Hvis vi ikke havde nøjedes med 5 terminer, men i stedet havde arbejdet med n terminer, havde vi regnet os frem til formlen for annuitetslån:

$$G = y \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$