

Bevis for formlen for annuitetsopsparing

Sætning – dvs. den påstand vi efterfølgende skal bevise

Hvis man indbetaler det samme beløb b hver termin, og rentefoden er r , så er kapitalen A umiddelbart efter den n 'te indbetaling:

$$A = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Bevis

Sætningen bevises gennem et eksempel - det er forholdsvis enkelt at generalisere ud fra eksemplet. I eksemplet er

$$b = 700, \quad r = 0,06 \quad \text{og} \quad n = 4.$$

Vi skal se på saldoen umiddelbart efter hver indbetaling.

$$\begin{aligned} 1. \text{ indbetaling:} & \quad A_1 = 700 \\ 2. \text{ indbetaling:} & \quad A_2 = A_1 \cdot 1,06 + 700 \\ & \quad = 700 \cdot 1,06 + 700 \\ 3. \text{ indbetaling:} & \quad A_3 = A_2 \cdot 1,06 + 700 \\ & \quad = (700 \cdot 1,06 + 700) \cdot 1,06 + 700 \\ & \quad = 700 \cdot 1,06^2 + 700 \cdot 1,06 + 700 \\ 4. \text{ indbetaling:} & \quad A_4 = A_3 \cdot 1,06 + 700 \\ & \quad = (700 \cdot 1,06^2 + 700 \cdot 1,06 + 700) \cdot 1,06 + 700 \\ & \quad = 700 \cdot 1,06^3 + 700 \cdot 1,06^2 + 700 \cdot 1,06 + 700 \end{aligned} \quad (1)$$

Ved at sætte 700 uden for parentes i får vi:

$$A = 700 \cdot (1,06^3 + 1,06^2 + 1,06 + 1)$$

Vi skal have omskrevet udtrykket i parentesen, så vi kalder det for S :

$$S = 1,06^3 + 1,06^2 + 1,06 + 1 \quad (2)$$

Vi har altså at

$$A = 700 \cdot S \quad (3)$$

Af (2) kan man få:

$$\begin{aligned} S \cdot 1,06 & = (1,06^3 + 1,06^2 + 1,06 + 1) \cdot 1,06 \\ & = 1,06^4 + 1,06^3 + 1,06^2 + 1,06 \end{aligned} \quad (4)$$

Det viser sig at være smart hvis man trækker (2) fra (4) – det gør vi så:

$$\begin{aligned} S \cdot 1,06 - S & = 1,06^4 + 1,06^3 + 1,06^2 + 1,06 - (1,06^3 + 1,06^2 + 1,06 + 1) \\ & = 1,06^4 + 1,06^3 + 1,06^2 + 1,06 - 1,06^3 - 1,06^2 - 1,06 - 1 \\ & = 1,06^4 - 1. \end{aligned}$$

$$\text{Altså har vi: } S \cdot 1,06 - S = 1,06^4 - 1. \quad (5)$$

Vi kan omskrive dette på følgende måde:

$$S \cdot 1,06 - S = S \cdot (1 + 0,06) - S = S + S \cdot 0,06 - S = S \cdot 0,06$$

Matema10k C-niveau, Frydenlund

Altså har vi: $S \cdot 1,06 - S = S \cdot 0,06$

Dette kan vi indsætte i (5):

$$S \cdot 0,06 = 1,06^4 - 1$$

$$S = \frac{1,06^4 - 1}{0,06}$$

Når vi indsætter dette i (3), får vi den endelige formel:

$$A = 700 \cdot \frac{1,06^4 - 1}{0,06}$$

Beviset kan gøres generelt ved at udskifte 700 med b og 1,06 med $(1 + r)$.