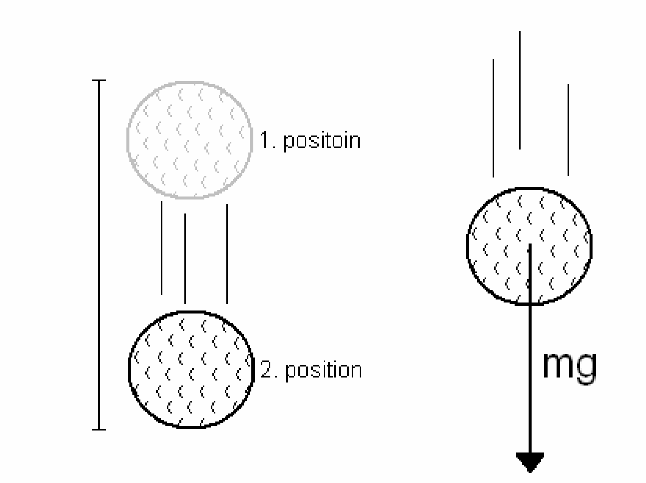
Morten Blomhøj:

Den faldende golfbold

Her betragter vi en golfbold, der falder lodret mod jorden, se figur 1. Vi ønsker at opstille en model, der kan beregne boldens højde over jorden som funktion af dens faldtid og derfor kan bruges til at besvare spørgsmålet:

Hvor lang tid går der inden en golfbold, der falder fra 10 meters højde, rammer jorden, og hvad er dens hastighed, når den rammer jorden?

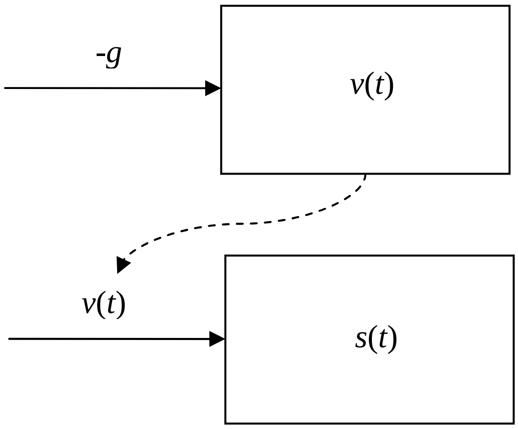
Vi udnytter idéen med at se på, hvad der sker i løbet af et lille tidsinterval, Δt. Hvis vi kender boldens position og hastighed til et bestemt tidspunkt, er det oplagt, at vi kan regne ud, hvor bolden er et lille øjeblik senere. Denne situation er vist i figur 1.



Figur 1: Viser golfbolden i to forskellige positioner. Position 1 til tiden t og position 2 til tiden $t+\Delta t$.

Det er oplagt, at både boldens hastighed og dens position ændrer sig kontinuert med tiden. Hvis vi i første omgang ser bort fra luftmodstanden og vindpåvirkningen, påvirkes bolden under faldet kun af tyngdekraften. Vi har altså brug for at kunne holde styr på, hvordan både hastigheden og positionen ændrer sig under faldet. Det kan vi illustrere ved et kompartment-diagram som vist i figur 2, når vi vælger at regne hastigheden i retning lodret mod jorden for negativ.

Hastigheden, $v(t)$, ændres gennem acceleration, og da bolden kun er påvirket af tyngdekraften, er tilstrømning til $v(t)$ konstant g. Af fortegnet på indstrømningen fremgår det, at vi regner accelerationen og dermed også hastigheden i retning mod jorden for negativ.



Figur 2: Viser to koblede kompartments. Et for hastigheden, der har en konstant indstrømning på minus tyngdeaccelerationen, -g = -9,82 m/sek^2, og et for positionen, hvor indstrømningen er givet ved den aktuelle hastighed, v(t).

Hvis vi vælger Δt så tilpas lille, at vi med god tilnærmelse kan regne, som om hastigheden er konstant i dette tidsrum, kan vi efter ”ind – ud princippet” opskrive følgende differensligninger:

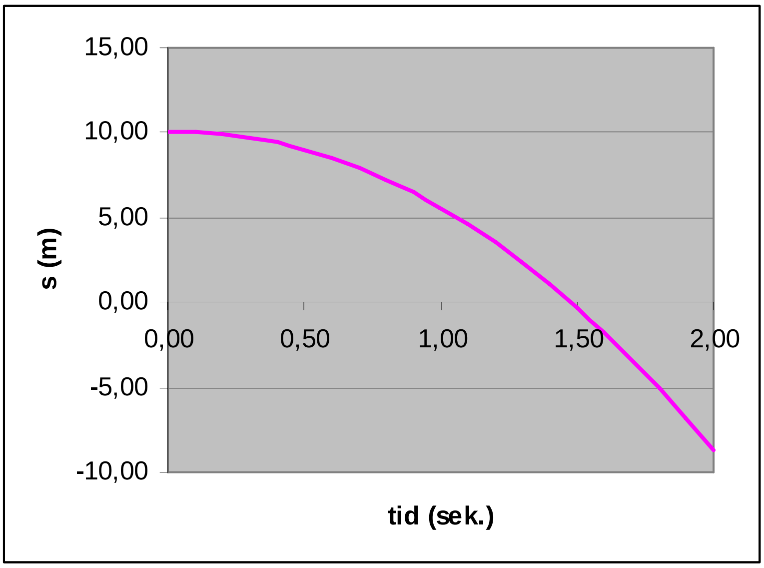
$$v(t+\Delta t) = v(t) - g\,\Delta t$$

$$s(t+\Delta t) \approx s(t) + v(t)\,\Delta t$$

Ligningen for *v* gælder eksakt under de givne forudsætninger fordi de netop sikre at accelerationen er konstant –g. Ligningen for *s* gælder derimod kun med god tilnærmelse. Hver gang vi beregner en ny position, begår vi en lille fejl, fordi boldens hastighed øges i løbet af tidsskridtet Δt, men vi kan gøre denne fejl så lille vi ønsker ved vælge Δt passende lille.

Ligesom i eksempel 1 kan vi beregne udviklingen af *v* og *s* i et regneark. Det kræver dog, at vi kender en begyndelsestilstand for golfbolden. Vi kan f.eks. blot vælge at starte beregningerne til tiden t = 0 og sætte $v(0)$ = 0 og $s(0)$ = 10 m. Det svarer altså til en situation, hvor golfbolden bliver sluppet i en højde af 10 m og falder mod jorden. Figur 3 viser resultaterne fra et sådant regneark.

Δt	0,10	
-g	-9,82	
t (sek)	v (m/sek)	s (m)
0,00	0,00	10,00
0,10	-0,98	10,00
0,20	-1,96	9,90
0,30	-2,95	9,71
0,40	-3,93	9,41
0,50	-4,91	9,02
0,60	-5,89	8,53
0,70	-6,87	7,94
0,80	-7,86	7,25
0,90	-8,84	6,46
1,00	-9,82	5,58
1,10	-10,80	4,60
1,20	-11,78	3,52
1,30	-12,77	2,34
1,40	-13,75	1,06
1,50	-14,73	-0,31
1,60	-15,71	-1,78
1,70	-16,69	-3,36
1,80	-17,68	-5,02
1,90	-18,66	-6,79
2,00	-19,64	-8,66



Figur 3: Regneark for differensligningerne for hastighed og position af golfbolden. Grafen viser faldstrækningen som funktion af faldtiden.

Ifølge modellen rammer bolden altså jorden efter knap 1,5 sek. med en fart på 14,5 m/sek. Vi kan se, at i modellen fortsætter bolden med at falde, hvilket selvfølgelig skyldes, at det ikke indgår i modellen, at *s* ikke kan blive negativ, og hvad der sker, når bolden rammer jorden. Den model, vi har opstillet, er med andre kun gyldig, så længe $s(t)$ er positiv.

Øvelse 1: Lav selv et regneark mage til det, der er vist i figur 3. Man skal kunne ændre på tidsskridtet, Δt. Brug regnearket til at beregne med tre decimaler, hvornår og med hvilken hastighed bolden rammer jorden, når den slippes i 10 meters højde.

Øvelse 2: Hvis man omskriver differensligningerne for golfbolden til *differential*ligninger på samme måde som i eksempel 1, kan man få følgende differentialligning for $s'(t)$:

$$s'(t) = -g\,t \quad \text{og det betyder, at s(t) må have formen:} \quad s(t) = -\tfrac{1}{2}g\,t^2 + k$$

Beregn k således at startbetingelsen $s(0) = 10$ er opfyldt, og tegn grafen for $s(t)$ givet ved denne forskrift i samme koordinatsystem som differensligningen for $s(t)$. Eksperimenter med forskellige værdier af Δt og forklar, hvad det betyder for forskellen mellem de to grafer.

Øvelse 3: Hvis man i stedet for differensligningen: $s(t+\Delta t) = s(t) + v(t)\Delta t$ bruger ligningen $s(t+\Delta t) = s(t) + \frac{1}{2}(v(t) + v(t+\Delta t))\Delta t$ til at fremskrive boldens position, tager man højde for at hastigheden ændrer sig i tidsintervallet Δt. Det svarer nemlig til, at man bruger gennemsnitshastigheden over intervallet i stedet for at bruge hastigheden i starten af intervallet. Forklar hvorfor, og indtast derefter denne differensligning for s i regnearket, og sammenlign igen grafen for funktionsforskriften fra øvelse 2. Hvad sker der nu, når man ændrer på Δt?

Øvelse 4: I en højde af 2 meter over jorden måles en golfbolds lodrette fart til 19 m/sek. Fra hvilken højde er bolden faldet? Og hvor længe har den været på vej mod jorden? Hvordan kan I bruge modellen til at svare på disse spørgsmål?

Øvelse 5: Prøv at udbygge modellen for golfbolden således, at den også tager højde for luftmodstanden. Luftmodstanden er en kraft, der virker modsat bevægelsesretningen. Man kan f.eks. antage, at denne kraft er proportionel med den aktuelle hastighed i anden potens. Udbyg kompartmentdiagrammet i figur 2 med luftmodstanden og opstil de tilhørende differensligninger. Udfør evt. nogle faldforsøg med forskellige bolde eller kageforme af papir og forsøg at bestemme luftmodstandskoefficienter, så modellens resultater kommer til at passe bedst muligt til måledata.