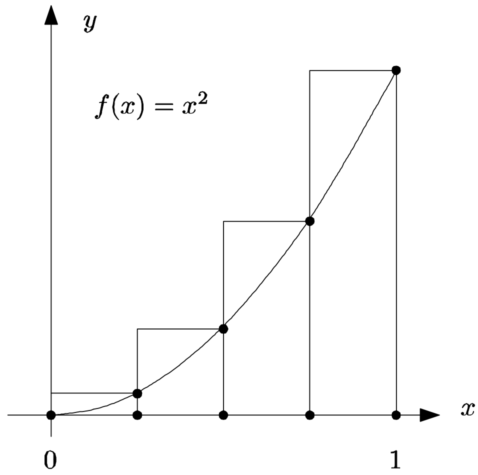
Integraler

Integralregning kan føres tilbage til *Archimedes*. Omkring 200 år f.Kr beregnede han arealet under en parabel ved en metode som ligner den moderne, hvor arealet bestemmes som grænseværdien for en sum af rektangler der tilnærmer parablen bedre og bedre. Den moderne formulering stammer fra *Riemann* (1826-1866). Som eksempel benyttes funktionen f, defineret ved $f(x) = x^2$.



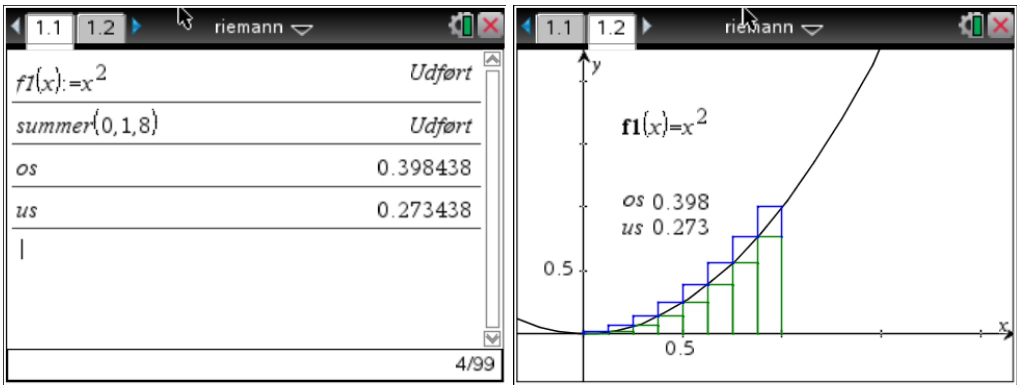
På figuren er intervallet $[0, 1]$ delt i 4 lige store underintervaller. På hvert interval er der tegnet et rektangel som har samme højde som funktionsværdien i det højre intervalpunkt. Denne trappefigur har et areal som er større end arealet under parablen fra 0 til 1.

Jeg kalder en sådan sum af arealer for en *oversum*, og benytter betegnelsen $O(0, 1, 4)$ for oversummen hvor intervallet $[0, 1]$ er delt i 4 intervaller. Mere generelt betegner $O(a, b, n)$ oversummen hvor intervallet $[a, b]$ er delt i n intervaller.

Ganske tilsvarende kan man udregne en *undersum* ved på hvert interval at tegne et rektangel som har samme højde som funktionsværdien i det venstre intervalpunkt.

Det er vel indlysende at hvis intervallet $[a, b]$ inddeles i flereog flere intervaller vil oversummen blive mindre og undersummen større.

Opgave 1 Prøv at eksperimentere med nspire-filen *riemann.tns*.



Funktionen skal hedde $f1(x)$. Kommandoen

$$\text{summer}(a, b, n)$$

beregner en masse punkter, så trappefigurerne for oversum og undersum automatisk bliver vist. Desuden udregnes oversummen og undersummen som *os* og *us*. Find fx ud af hvor mange delintervaller intervallet $[0, 1]$ skal inddeles i for at differensen mellem oversum og undersum er ca. 0.5.

Opgave 2 Udskift funktionen i *riemann.tns* med funktionen $f_1(x) = 1/x$. Beregn oversum og undersum for intervallet $[1, 5]$ med $n = 32$.

Integralet som grænseværdien for en sum

$[A10k : 187 - 189]$ Her er det stadig $f(x) = x^2$ der bruges som eksempel. Intervallet $[a, b]$ inddeles i n lige store intervaller med intervallængden Δx. Dvs

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}. \tag{1}$$

Intervallet bliver herved delt i delepunkterne

$$x_0 = a,\ x_1 = a + \Delta x,\ x_2 = a + 2\Delta x, \ldots,\ x_n = a + n\Delta x = b. \tag{2}$$

Vi kan nu opskrive en formel for såvel oversum som undersum[1]. Det ser nok lidt kringlet ud, men så er det heller ikke værre.

$$O(a, b, n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ \Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(a + i\Delta x)\,\Delta x \tag{3}$$

$$U(a, b, n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\ \Delta x = \sum_{i=0}^{n-1} f(a + i\Delta x)\,\Delta x \tag{4}$$

Med $a = 0$, $b = 1$ og $\Delta x = 1/n$ får vi

$$O(0, 1, n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$U(0, 1, n) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} i^2$$

Ved at taste som følger i nspire får du for oversummen

$$\frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} \left(i^2\right) \qquad \blacktriangleright \qquad \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \tag{5}$$

eller med $n = 32$

$$\frac{1}{32^3} \sum_{i=1}^{32} (i^2) \qquad \blacktriangleright \qquad \frac{715}{2048} = 0.349\,12 \tag{6}$$

Du kan også med nspire finde grænseværdien af udtrykket i ligning (5).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \qquad \blacktriangleright \qquad \frac{1}{3} \tag{7}$$

Der gælder noget helt tilsvarende for undersummen.

Opgave 3 Bestem den generelle undersum $U(0, 1, n)$ samt $U(0, 1, 32)$ på samme måde som vist med oversummerne. Vis også at

$$\lim_{n\to\infty} U(0, 1, n) = \frac{1}{3}.$$

[1] Bemærk at bogen bruger betegnelsen venstresum og højresum istedet for undersum og oversum.

Definition 4 Lad f være en funktion som er defineret på intervallet $[a, b]$. Hvis differensen

$$O\left(a, b, n\right) - U\left(a, b, n\right)$$

mellem oversum og undersum kan gøres vilkårligt lille siger vi at f har et *integral* eller at f er *integrabel* . Vi betegner så integralet af f med symbolet

$$\int_a^b f\left(x\right) dx$$

og definerer det som den fælles grænseværdi af oversummer og undersum.

$$\int_a^b f\left(x\right) dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i\right) \Delta x, \tag{8}$$

hvor x_i er et punkt i det i-te delinterval, og $\Delta x = \left(b - a\right)/n$.

Uden bevis nævner jeg

Sætning 5 Hvis f er en *kontinuert* funktion defineret på intervallet $[a, b]$ er f integrabel.