Bevis for formlen for gældsannuitet – udgave 1

Sætning

Sætning – dvs. den påstand vi efterfølgende skal bevise

Hvis man indbetaler ydelsen y *hver termin i* n *terminer (første gang man betaler er én termin efter lånet er optaget), og rentefoden er* r *,* ***så*** *er lånets størrelse:*

$$G = y \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

Bevis
Følgende bevis bygger på en sammenkædning af annuitetsopsparing, kapitalfremskrivning og annuitetslån.

Beviset bygger på en historie om Vagn fra Vanløse. Vagn drømmer om en lækker bil, men mangler penge. Han har en stenrig onkel i USA, onkel Bill.

Onkel Bill er på besøg hos Vagn, og de ser sammen på en bil. Onkel Bill tilbyder Vagn at låne Vagn penge på følgende betingelser:

Onkel Bill ønsker ikke at tabe penge. Derfor skal Vagn – når han kommer for at besøge onkel Bill i USA om to år – betale det lånte beløb tilbage. Dog skal dette beløb fremskrives fordi onkel Bill ville have fået renter af beløbet hvis han havde haft det stående i banken.

Vagn fra Vanløse skal således spare op til at betale onkel Bill det lånte beløb tilbage. Og han skal betale det lånte beløb **plus** renter.

Hvad Vagn skal spare op, kan vi udregne ved hjælp af formlen for opsparingsannuitet:

$$A = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Her er beløbet *A* det beløb som Vagn lånte.

Beløbet Vagn skal betale onkel Bill er det lånte beløb (G) plus renter, altså:

$$G \cdot (1+r)^n$$

Da dette også er det beløb Vagn skal have sparet op, får vi:

$$G \cdot (1+r)^n = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Vi ønsker nu at isolere *G*, og derfor dividerer vi med $(1+r)^n$ på begge sider af lighedstegnet:

$$G = \frac{\left(b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}\right)}{(1+r)^n}$$

Når man dividerer et produkt med et tal, skal man dividere tallet op i én af faktorerne, og det gør vi her:

$$G = b \cdot \frac{\left(\frac{(1+r)^n - 1}{r}\right)}{(1+r)^n}$$

Når man dividerer en brøk med et tal, skal man gange tallet i nævneren – det gøres her:

$$G = b \cdot \left(\frac{(1+r)^n - 1}{r \cdot (1+r)^n}\right)$$

Herefter dividerer vi med $(1+r)^n$ i alle tre led i brøken:

$$G = b \cdot \frac{\left(1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right)}{r}$$

Vi benytter nu potensregnereglen $\frac{1}{a^r} = a^{-r}$ og omformer til:

$$G = b \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

Når det handler om et lån, betegner man terminsydelsen for *y*, så derfor skifter vi *b* ud med *y*:

$$G = y \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

Og hermed har vi bevist formlen for annuitetslån.